#### Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty

作成者：西村AN

**概要**

|  |
| --- |
| 本資料は，Merton（1969）の内容を簡易的に要約したものである．本論文は，生涯消費の期待効用を最大化するように行動し，時間的に連続的に取引できる任意の数の投資家によるポートフォリオ選択行動から，資本市場の時間間モデルを演繹する．資産に対する明示的な需要関数が導かれ，一期間モデルとは異なり，現在の需要が将来の投資機会の不確実な変化の可能性に影響されることが示される．需要を集計し，市場清算を行った後の需要を集約し，市場の清算を求めた後，期待リターンの均衡関係を導き出すと，古典的な資本資産価格モデルとは逆に，リスク資産の期待リターンは，システマティックリスクや市場リスクがない場合でも，リスクレスレートと異なる場合があります． |

# イントロダクション

現代の資本市場理論における重要な発展の一つは，Sharpe-Lintner-Mossinの平均分散アプローチであり，一般に資本資産価格モデルと呼ばれている．このモデルは100以上の学術論文の基礎となり，非学術的な金融界にも大きな影響を与えたが，理論的にも実証的にも批判を受けることが多い．このモデルは，投資家がMarkowitz[21]の平均-分散基準に従ってポートを選択すると仮定しているため，この基準に対するあらゆる理論的反論（その数は多い）にさらされることになる．また，特に同質的期待やモデルの単期性など，追加的な仮定が必要であるという批判もある．理論的な反論に同意しつつも，資本市場はこれらの仮定を満たしているかのように動いていると主張するモデルの支持者自身も，批判を免れることはできない．このモデルでは，ある資産を保有することによる期待超過収益が，その収益の市場ポートフォリオとの共分散（その「ベータ」）に比例すると予測しているが，Black，Jensen，Scholes [3] の注意深い実証研究により，そうではないことが証明されている．

特に，「低ベータ」資産はモデルによる予測よりも平均的に高いリターンを獲得し，「高ベータ」資産はモデルによる予測よりも平均的に低いリターンを獲得することがわかった．それにもかかわらず，このモデルが未だに利用されているのは，このモデルが資産利回り間の関係を解釈しやすい強力な仕様を提供する均衡モデルであり，資産リターンの変動のかなりの部分を説明していることを実証的証拠が示しているためである．

本論文では，以下の性質を持つ資本市場の均衡モデルを開発する．

1. 資本資産価格モデルの単純性と経験的な扱いやすさを持ち，
2. 期待効用最大化と資産の有限責任に合致し，
3. (iii)経験則とより一致した利回りの関係の規定を提供する

このようなモデルは，コストなしに構築することはできない．古典的モデルと共通する仮定（主に均質な期待）は，この新しいモデルを同じような批判にさらします．

資本資産価格モデルは，静的（単期）モデルであるが，一般に，それが一時的に成立するものとして扱われている．Fama [9]は，選好と将来の投資機会セットが状態依存的でない場合，時系列ポートフォリオ最大化は，投資家が単一期間の効用関数を持つかのように扱えることを示し，この仮定をある程度正当化している．しかし，これらの仮定は，後の分析で見られるように，かなり限定的である．" Merton [25]は，異時点間最大化者のポートフォリオ行動が，一定の投資機会セットではなく，変化する投資機会セットに直面した場合，大きく異なることを多くの例で示している．

ここで紹介するモデルは，[25]で述べられている消費者・投資家の行動に基づいており，仮定が妥当なものであるためには，それが間歇的でなければならない．このモデルは，静的モデルには決して現れないような効果を捉えることができるのです．そして，この効果こそが，新しいモデルと古典的なモデルで得られる資産利回りの均衡関係の仕様に大きな違いをもたらすのである．

# CAPITAL MARKET STRUCTURE

資本市場は次のような構造になっていると想定している．仮定1～6は，完全市場の標準的な仮定であり，その利点は文献で広く議論されている．仮定7は標準的なものではないが，仮定2からほぼ直接的に導かれるものである．取引にコストがかからず，資産がどのような規模でも交換されるのであれば，投資家はいつでもポートフォリオを修正できることを望むだろう（実際に修正するかどうかは別として）．現実には，取引コストとインディビジュアビリティは存在し，有限の取引間隔（離散時間）モデルを採用する理由の一つは，これらのコストを明示的ではないにしても，暗黙的に認識させることにあるのです．しかし，取引コストの問題を回避するこの方法は，適切な解を求めると，取引間隔が確率的であり，一定でない長さであることがほぼ確実に示されるので，満足のいくものではない．さらに，ポートフォリオの要求とその結果としての均衡関係は，選択された特定の取引間隔の関数となる．10年間取り消すことのできない（「凍結」された）ポートフォリオを決定する投資家は，毎日ポートフォリオを修正するオプション（たとえコストがかかっても）を持っている投資家と全く異なる選択をすることになる．本質的な問題は市場構造であり，投資家の嗜好ではない．よく発達した資本市場では，連続的な市場開放の時間間隔は十分に小さく，連続時間の仮定は良い近似となる．

【Assumption】

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Assumption 1 | ： | すべての資産に有限責任がある |
| Assumption 2 | ： | 取引コスト，税金，資産分割の問題がない |
| Assumption 3 | ： | 十分な数の同程度の資産レベルの投資家がいて，各投資家が市場価格で好きなだけ資産を売買できると考えていること |
| Assumption 4 | ： | 資本市場は常に均衡している（すなわち，非平衡価格での取引は存在しない）． |
| Assumption 5 | ： | 同じ金利で貸し借りする為替市場が存在する． |
| Assumption 6 | ： | 全資産を売却し，その代金を全額使用することができる． |
| Assumption 7 | ： | 資産の売買は時間的に連続的に行われる |

# ASSET VALUE AND RATE OF RETURN DYNAMICS

資本市場の構造を説明した上で，次に，市場で取引される資産のリターンのダイナミクスを説明する．消費者投資家は，各時点で，(i)次の取引区間の各資産のリターンの推移確率（投資機会集合），(ii)将来の期間の資産のリターンの推移確率（すなわち，投資機会集合の変化の確率過程の知識）を知っていれば，その意思決定において十分である．単年度最大化投資家が，定義上，現在より先の事象を考慮しないのとは異なり，異時点間最大化投資家は，ポートフォリオを選択する際に，現在のリターンと将来得られるであろうリターンとの関係を考慮する．例えば，ある資産の現在のリターンが，利回り（「資本化」率）の変化と負の相関があるとする．この場合，投資家は，この資産を保有することで，来期の利回り機会が予想より低い場合，より高いリターンを期待することになる．

資産市場の供給側について簡単に説明することは，現在の資産収益と投資機会セットの変化との関係を理解するのに役立つ．

資産とは，時間に使用される資本の量（機械の数など物理的単位で測定）の関数として，キャッシュフロー（消費単位で評価）と物理的減価に関する確率的な分配である生産技術として定義されている．消費財に換算した単位資本あたりの価格はであり，時間における資産の価値はに等しい．

長さの期間における資産のリターンは，キャッシュフローに未償却資本の価値である（ここで2は資本の物理的減価率）を加え，資産の初期価値を差し引いたものになる．資産残高の価値の変化の総和は，資産のリターンとキャッシュフローを超える総新規投資の価値の合計に等しくなっている．

このモデルでは，各企業は単一の資産に投資し，株式と呼ばれる一種類の証券を発行すると仮定している．したがって，「企業」と「資産」という用語は，同じ意味で使うことができる．N(t) を発行済み株式数，P(t) を一株当たり価格とすると，N(t) と P(t) は差分方程式で定義される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

また，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

ただし，

株主への配当がすべて自己株式取得によって実現されると仮定すると，(1)，(2)より，以下式は消費財単位での期間収益率になる．

均衡から均衡への時間的な動きには，価格と量の両方の調整が含まれるため，完全な分析を行うには，収益率と資産価値の変化の両方のダイナミクスを記述する必要があります．そのためには，株式の供給を決定する企業の行動を特定する必要があり，そのためには，実物資産構造（技術，資本が「パテ」か「粘土」か，など）の知識が必要となる．

特に，減価償却率の低い非シフト型資本を大量に（現在のキャッシュフローに対して）保有する企業の現在のリターンは，短期的には，新しい均衡への調整のほとんどが価格によって行われるため，資本化率のシフトによって強い影響を受ける傾向がある．

本論文では，投資家行動のみを検証し，均衡時の資産需要や相対的な利回り要求12を導出するため，収益率のダイナミクスのみを明示的に検証することにする．したがって，モデルでは非同質とされたある種の変数は，完全均衡システムにとっては内同質となる．

連続取引の仮定（仮定7）から，リターンや機会集合の変化は連続時間の確率過程によって記述できるものとする．しかし，長さhの離散的な取引区間について過程を記述し，さらにhが0になるときの極限を考察することで，分析がより明確になるであろう．

以下のように仮定する．

【Assumption】

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Assumption 8 | ： | 機会集合とその変化を記述する確率過程のベクトル集合は，時間均質なマルコフ過程である |
| Assumption 9 | ： | プロセスの状態変数の局所的な変化のみが許される． |
| Assumption 10 | ： | 時間の各時点における機会集合の各資産について，単位時間あたりの期待収益率・分散は，次式で定義される．は条件付き期待値を表し，は右連続かつ0に収束する関数，は瞬時期待リターン，は瞬時リターンの分散と呼ばれる． |

仮定8は，リターンを記述する確率過程自体がマルコフである必要はなく，遷移確率の変化を記述する他の変数（有限個）を含む「状態の拡張」（補足変数）手法［7，262頁］によって，（拡張）セット全体がマルコフでなければならないので，あまり限定的ではありません．このようにリターンにマルコフ仮定を一般化することは，要求されるリターンが一株当たりの価格以外の変数（例えば，資産の相対的供給）に依存すると予想されるため，重要である．

仮定9は，連続時間の状態変数の連続性の仮定を離散時間に置き換えたものである（すなわち，をランダムな状態変数とすると，確率1で，である）．つまり，小さな時間間隔では，価格変化（リターン）や機会集合の変化は小さいということである．この制約は，暗黙の「滑らかさ」によって，パレート-レビーやポアソン型のジャンプ過程を排除しているため，非自明である．

仮定10は，小さな時間間隔に対して，不確実性が「洗い流される」（すなわち，）ことも，分析を支配する（すなわち，）こともないことを保証します．実は，仮定10は仮定8と9から導かれる（[13, p.321]を参照）．

をベクトル確率過程とすると，仮定8-10は，が0になる極限において，X(t)が連続的な状態空間変化をする拡散過程であり，遷移確率が（多次元の）Fokker-PlankまたはKolmogorov偏微分方程式を満たすことを意味します．

移行確率の研究にはこれらの偏微分方程式で十分であるが，明示的なリターンのダイナミクスを確率的差分方程式の形で，さらに極限をとることによって確率的微分方程式の形で書き下すことが有効である．これまでの分析から，リターンのダイナミクスを以下で書くことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

ただし，ここで，構成上，およびであり，は純粋なランダム過程，すなわち，について，とは同一分布で相互に独立である．

確率過程を以下で定義すると z(t) は独立増分による確率過程となる．さらに y(t) がガウス分布であるとすると，のが0になる極限は，Wiener過程またはブラウン運動を記述することになります．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

確率微分方程式の形式では，以下の通りとなる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

同様に，(3)の極限をとると，番目の資産の瞬間的なリターンに対する確率微分方程式は次のように導出される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

(6)のような過程は伊藤過程と呼ばれ，連続的であるが，微分可能ではない．(6)より，ある時点における機会集合の十分統計量はであり，はWiener過程との間の瞬時の相関係数である

(6)のようなリターンダイナミクスのベクトルは， および は，せいぜい P の関数である．一般に，各時点で均衡清算条件は，均衡市場価値と の間の暗黙の関数を定義するので，これがそうであるとは考えられません．

したがって，要求される期待リターンの変化は市場価値の変化と確率的に関係すると考えられ，Pのみに依存するのはNの変化（供給の変化）が非確率的である場合のみとなる．つまり，（6）と（7）が一緒になってマルコフシステムを形成し，とが標準的なウィーナー過程であると仮定するのである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

連続取引と確率過程の連続マルコフ構造の仮定の下で，分布の瞬間的な最初の2つのモーメントが十分な統計量であることが示された．さらに，との存在と有界性により，0に等しいはすべての資産の有限責任を保証する自然な吸収障壁となる．

この論文では，個の異なるリスク資産と，1 個の「瞬時リスクなし」資産が存在すると仮定する．「瞬時リスクレス」とは，各時点で，各投資家が，その資産を保有することによって次の瞬間に収益率r(t)を獲得できることを確実に知っている（すなわち，かつ ）ということである．

しかし，の将来の値は確実にはわからない（すなわち，(7)において）．この資産を為替資産，を民間の瞬時借入（および貸出）金利と解釈する．あるいは，この資産は（非常に）短い国債を表すこともできる．

# PREFERENCE STRUCTURE AND BUDGET EQUATION DYNAMICS

[25]に記述されているような選好構造を持つK人の消費者-投資家が存在すると仮定する：すなわち，k番目の消費者は，以下のように行動する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

ここで， は彼の富の現在価値を条件とする条件付き期待値，は投資機会セットの状態変数，は彼の死亡年齢の分布（これは投資結果に依存しないと仮定）である．

歳における彼の瞬間的な消費フローはである．は，消費に関する厳密に凹のフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン効用関数であり，Bkは厳密に凹の「遺贈」または終身効用富裕関数である．

上付き文字を削除すると（分かりやすくするために必要な場合を除く），番目の投資家の累積方程式は以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

ここで，は第の資産に投資した財産の割合，は所有する第の資産の株式数，は賃金所得である．

(6)からdP;/P;を代入すると，(9)は次のように書き直すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

ここで，の選択は，予算制約を満たすようにを常に選択できるため，制約を受けない．

予算制約，蓄積式（9）より以下を得る

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

すなわち，新規に購入する株式の純額は，賃金収入による貯蓄の価値と等しくなければならない．

# 最適化の方程式：需要関数

計算を簡単にするため，投資家の所得はすべてキャピタルゲインから得られると仮定し（すなわち，），表記を簡単にするため，状態変数ベクトルを導入し，その要素は現在ののレベルを表す．

X のダイナミクスは，伊藤の公式として記述される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

ここで，は対角要素を持つ対角行列，はベクトル Wiener プロセスはとの瞬時相関係数， はと間の瞬時相関係数である．

私は別のところで，(8)に従って消費・投資計画を選択する投資家の必要な最適化条件は，各時点で，以下の通りであることを示した．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

ここで，，富の効用関数の添え字は偏導関数を表す．は番目と番目の資産のリターンの間の瞬間的な共分散（つまり）．(13)から導かれるn＋1次条件は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

また，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

ここで，は，状態変数の関数としての最適消費ルールとポートフォリオ・ルールである．式（14）は，現在の消費の限界効用と富（将来の消費）の限界効用を等しくするための通常の時間間包絡条件である．

(15)の特徴は，ポートフォリオ需要に対して線形であることであり，したがって，これらの関数を行列反転により明示的に解くことができる．

第2項の は，投資機会セットの「不利な」シ フトに対するヘッジ手段として資産に対する需要を反映する．投資機会変数 の「好ましくない」シフトとは，与えられた（将来の）富の水準に対して（将来の）消費が減少するようなの変化と定義される．不利なシフトの例としては，<0でが増加した場合である．

(16)をについて微分することで，すべてのリスク回避的な効用最大化者は，ならば，ceteris paribus，そのリターンがの変化と正の（負の）相関があるほど，番目の資産をより多く要求するという意味で，そのようなシフトに対してヘッジしようとすることが示せる．

このように，事後的な機会設定が予想より不利であった場合，投資家はリターンの正の相関関係を通じて，より高いレベルの富によって補償されることを期待することになる．同様に，事後的なリターンが低ければ，より有利な投資環境を期待することになる．

この行動は一種の時間間消費「平滑化」を意味するが，それは従来の消費水準の一定維持というタイプではなく，むしろ消費の（予期せぬ）時間的変動を最小化しようとする試みを反映したものである．簡単な例で説明しよう．単一のリスク資産，リターンrの無リスク資産，Xはスカラー（例えば，X＝r）であると仮定する．さらに，a = rを要求する．標準的なポートフォリオ分析では，リスクを嫌う投資家は全財産を無リスク資産に投資する（すなわち，w = 0）ことが示されるでしょう．伊藤の定理により，彼の消費の（瞬間的な）分散を考えてみよう．

単純に微分すれば，この分散は で最小になることがわかるが，これはまさに (16) で与えられる需要であり， かつでは，である．

したがって，現在5％の金利に直面し，来期は2％または10％の金利になる可能性がある異時点間投資家は，同じ環境における単一期間の最大化者と，長期間にわたって5％の金利に直面する異時点間最大化者とは，ポートフォリオ需要が異なることになる．

我々は，ポートフォリオ需要の明示的な表現を導き出し，その意味についてある程度の解釈を与えたが，このレベルの一般性でのさらなる分析は困難である．効用関数のクラスを制限することによって，さらにいくつかの結果を得ることができるが（Merton [25, p. 402]を参照），より実りあるアプローチは，機会集合の構造を制限するために，いくつかの追加的（単純化）仮定を追加することである．

# 継続的な投資機会

このモデルの最も単純な形は，投資機会セットが時間を通じて一定（すなわち，が定数）であり，（6）より，一株当たりの価格の分布は，すべての資産に対して対数正規分布となる場合である．この形式のモデルはMerton [25, p. 384-88]で詳細に検討されているので，主要な結果は証明なしで示されている．

この場合，k番目の投資家によるi番目の資産に対する需要（16）はAに還元され，これは1期間のリスク回避的な平均分散投資家が持つ需要と同じである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

すべての投資家が投資機会セットに同意している場合（同質的期待），リスク資産に対する要求の比率は選好に依存せず，すべての投資家に同じとなる．さらに，次の定理がある．

|  |
| --- |
| ≪Theorem 1≫  リターンが対数正規分布するn個のリスク資産と無リスク資産があるとき，(i) 一方は無リスク資産のみ，他方はリスク資産のみを含む効率的なポートフォリオ（「投資信託」）の一対が存在し，好み，財産分布，時間軸とは無関係に，すべての投資家は元のn + 1個の資産からポートフォリオを選択するかこの二つのファンドから選択するかで無分別であろうとする．(ii) リスク性資金のリターンの分布は対数正規分布である (iii) リスク性資金の資産のうちk番目の資産に投資される割合は |

定理1はMarkowitz-Tobin分離定理の連続時間版であり，リスク性資金の保有はリスク性資産の最適な組み合わせに対応する（Sharpe [39, p.69]を参照）．

市場ポートフォリオが均衡において効率的であるという条件を用いると，このバージョンのモデルでは，均衡リターンは以下を満たすことが示される（Merton [26]参照）．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

ただし，は番目の資産のリターンと市場ポートフォリオのリターンの共分散，は市場ポートフォリオの期待リターンである．式(20)は，古典的な資本資産価格モデルの証券市場線に対する連続時間アナログである．

したがって，投資機会セットが一定であるという仮定は，投資家があたかも単一期間のマキシマイザーであるかのように振る舞い，資本資産価格モデルで規定される均衡収益率が得られるための十分条件であると言えるでしょう．また，一部の特異なケースを除いて，この仮定は必要である．

# 一般化された分離：3つのファンドの定理

残念ながら，投資機会集合が一定であるという仮定は事実と一致しない．なぜなら，投資機会集合には少なくとも一つ直接観測可能な要素，すなわち金利が存在し，それが時間とともに確率的に変化していることは間違いないからである．この観測と矛盾しない最も単純なモデルは，機会集合の変化を記述するのに，単一の状態変数で十分であると仮定した場合である．さらに，この変数が金利であると仮定する（すなわち，）．

金利は，ポートフォリオ理論，一般資本論，そして実務家にとって常に重要な変数であった．金利は観測可能であり，時間的に確率的であるという条件を満たし，他の資産の利回りを決定する唯一の要因ではないことは確かだが，重要な要因であることは確かである．したがって，これから行う分析では，金利の変化の影響を，経済学者が過去に一般的に行ってきたように，すなわち，投資機会集合の変化を表す単一（道具）変数として解釈することが必要である．例えば，は，富のレベルが一定で，機会集合が変化したことによる消費の変化である．

このように仮定すると，番目の投資家の番目の資産に対する需要関数（16）は，はj番目の資産のリターンと金利の変化（）の間の瞬時の共分散を用いて以下の通りに書くことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

(21)を見ると，リスク資産に対する要求の比率は選好の関数であるため，標準的な分離定理は得られない．しかし，一般化された分離（[5]を参照）は得られる．特に，すべての投資家の最適ポートフォリオは，3つの投資信託（ポートフォリオ）の線形結合として表すことができることが示される．

この定理には必要ありませんが，の変化に対してリターンが完全に負の相関を持つ，つまりである資産（慣習上，n番目の資産）が存在すると仮定すると，分析がより容易になります．そのような資産として，（デフォルトという意味で）リスクのない長期債が考えられる．この場合，共分散項 は， をの変化の標準偏差として，(22) のように書き直すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

(22）より，需要関数（21）の第2項は，がリターンの分散共分散行列の逆行列の要素であることから，ではゼロに等しく，ではに等しい．

したがって，(21)を簡略化した形で書き直すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

|  |
| --- |
| ≪Theorem 2 (“Three Fund” Theorem)≫  本節の条件を満たすn個のリスク資産と無リスク資産があるとき，これらの資産から構築される3つのポートフォリオ（「投資信託」）が存在し，   1. （8）に従って行動するすべてのリスク回避的投資家は，元のn＋1個の資産からポートフォリオを選択するか，これら3つのファンドから選択するかを無分別にする， 2. 各ファンドのポートフォリオの個々の資産への投資比率は純粋に「技術的（すなわち，個々の資産への投資機会セットの変数にのみ依存し，投資家の選好には依存しない． 3. 投資家のファンドに対する要求は，個別資産の投資機会セットやファンドの保有資産の比率を知る必要がない． |

(Proof)

第一基金は，定理1における危険な基金と同じ比率，すなわち， に対して

を保持するとする．

2番目のファンドが番目の資産のみを保有し，3番目のファンドが無リスクの資産のみを保有するとする．番目の投資家の富のうち番目のファンドに投資された割合をとすると，となる．

(i)を証明するためには，需要関数，(23)を正確に再現する配分が存在すること，すなわち，(24)を示さなければならない．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |
|  | (23) |

の定義から，配分とは(24)を満たした．(ii)の部分は，3つのファンドに対する選択から導かれる．(iii)を証明するためには，投資家が（集計された）投資機会セットに関する知識のみを与えられた場合，すなわち，とが第一ファンドのポートフォリオの期待リターンと分散，が第二ファンドのリターンと共分散が与えられた場合に，この配分を選択することを示さなければならない．

の定義から，以下を示すのは簡単である．

ファンドの需要関数はで(23)と同じ形になり，これらの式から導かれる比率はとなり，ここではと書き換えることができる．

定理2は分散化定理であり，プロのポートフォリオ・マネジャーによるリターン分布の推定が，少なくとも投資家が形成しうる推定と同等に優れていると投資家が信じるならば，すべての個別資産を保有し，個人投資家が購入するために自らの株式を発行する3つの金融仲介機関（投資信託）の設立によって，投資決定を2つに分離することができるとするものである．1号ファンドと3号ファンドは，投資家に対して（瞬間的に）効率的なリスク・リターン・フロンティアの「サービス」を提供し，2号ファンドは，フロンティアの不利な時間間シフトをヘッジすることを可能にするものである．

なお，番目の投資家の2番目のファンドに対する需要は，の正負によって正負が確定し，これは，第5節の一般ケースで述べたヘッジ行動と整合的である．

# 資産間の均衡利回り関係

需要関数(23)が与えられれば，7節のモデルの均衡市場清算条件を導き出し，そこから個別資産の期待リターンと市場の期待リターンの均衡関係を導き出すことができる．

(23)より，総需要関数は，(25)のように書ける．

|  |  |
| --- | --- |
| ただし， | (25) |

を番目の企業が供給する株式数とし，資産市場が常に均衡していると仮定すれば，(26)となる．さらに，，ここでは全資産の（均衡）価値である市場である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

市場価値の均衡ダイナミクスは，次のように書くことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

したがって，市場価値の変化は，現在の発行済み株式のキャピタルゲイン（第1項）と発行済み株式総数の拡大（第2項）によりもたらされる．この2つの効果を分離するために，個別企業の問題を解くのと同じ手法を用いる．すなわち，市場ポートフォリオの「株」あたりの価格をとし，となる株数をとする．

そして，

となり，とは以下の確率微分方程式によって定義され，構成上，は市場（ポートフォリオ）の収益率である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

(27)を(28)に代入し，(11)を用いると，以下が得られる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

市場価値全体に対する第1位企業の寄与率を とすると，(6)，(29) より，市場収益率は次のように書ける．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

(25)のにを代入すると，個別資産の均衡期待収益(31)を解くことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

他の資産と同様に，

を市場ポートフォリオの（瞬間的な）期待リターン，共分散，分散と定義することができる．そして，(31)は(32)のように書き直すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

また，(32)にを乗じ，和を取ると，(33)となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

n 番目の資産が(32)を満たすことに注目し，(33)と合わせて(32)を(34)と書き直す．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

式（34）は，均衡において，投資家は，市場（システマティック）リスクの負担と，投資機会集合の（全体から見て）不利なシフトのリスクの負担を期待リターンで補償されることを述べており，古典的資本資産価格モデルの証券市場線を自然に一般化したものである．なお，ある証券が市場リスクを持たない（すなわち，）場合，その期待リターンは通常のモデルで予測される無リスク金利に等しくならない．

どのような条件で，証券市場平面方程式（34）は，（連続時間）古典的証券市場直線，方程式（20）に還元されるのだろうか．需要方程式(21)を適当に集約してみると，その条件は(35a)または(35b)である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35a) |
|  | (35b) |

また，このような加法的効用関数は，ベルヌーイ対数関数のみであり，この場合，(35a)が成立すると考える理由はない．

条件(35b)は，g = 0，すなわち，金利が非確率的である，しかしそうではない，または，P = 0，すなわち，すべての資産のリターンが金利の変化と相関がない，という二つの方法で得られる可能性がある．この条件は可能ではあるが，真の均衡状態とは言えないだろう．

自然の摂理で，利用可能なすべての実物資産に対してであったとする．すると，番目の資産は存在しないので，(34)は(20)に還元される．金利の変化と完全に負の相関があり，したがって，仮定により，他の資産や市場とは相関がない（すなわち，）「人工」証券（例えば，長期債）を構築することを考える．なので，(25)より，とすると，となる．

したがって，証券がゼロベータであっても，投資家は，この証券を作成するために他の投資家に（無リスク率に比して）プレミアムを支払うことになります．

この分析が金利の期間構造の理論に与える影響は，長期無リスク債券は，たとえ市場リスクがないとしても，期待仮説（）を満たさないということである．課されるプレミアムは流動性プレミアムではなく，Hの符号によって正または負のいずれかになる．これらの結果は，「ハビタット」理論（[28]を参照）を，ハビタットを将来の投資機会の変化に対するヘッジへの選好が強い（または弱い）と解釈すれば，整合的である．

# 経験則(EMPIRICAL EVIDENCE)

このモデルは正式には検証されていないが，Black, Jensen, and Scholes (BJS) [3] の知見と，その後の Scholes [37] の未発表の研究成果を使って，予備的な分析を行うことができる．前述したように，彼らは，市場との共分散がゼロ（すなわち）になるように構築したポートフォリオの平均リターンが無リスクレートを有意に上回ったことを発見し，これは証券のリターンに体系的に影響を与える要因が（少なくとも）市場とは別に存在することを示唆してい る．彼らはこの第二の要因を，個々の証券の共分散が証券のベータの関数であることから，「ベータ要因」と呼んでいる．

特に，高ベータ（β＞1）銘柄は負の相関を，低ベータ（β＜1）銘柄は正の相関を持つことがわかった．BJSの仕様と実証結果をまとめると，以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (36) |

ここで，は「ゼロベータ」ポートフォリオの期待リターン，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37a) |
|  | (37b) |

第二要因の発見は，我々のモデルのアプリオリな仕様と整合的であるが，rの変化が投資機会セットに与える影響について，何らかの更なる仕様がなければ，彼らの具体的な発見がモデルと合致しているとは言えない．ただし，rの変化が資本化率の変化に対する道具変数であるならば，両者は一致しているという議論は可能である．

(34)の係数のの関数としての定性的特性は，(37b)のと同じになること，ゼロベータポートフォリオの経験的特性は長期債のポートフォリオのそれと似ていることを示す予定である．

ここで，古典的な証券市場線，を，資本化率の関係の妥当な近似とすると，の r に関する対数弾力性を の関数として計算すると，の変化に対する証券市場線の傾きの変化であるといえる．

(27)より，この弾性値は，y＜1であるから，ほぼ確実にBの単調増加関数であることがわかる．

古典的な証券市場線，ここで を，資本化率の関係の妥当な近似値とすると，の に関する対数弾力性をの関数として計算すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

ここで，つまりの変化に対する証券市場線の傾きの変化となる．(27)より，この弾力性は，

あるからほぼ確実にの単調減少関数であることがわかる．

企業の価値をと書き，を「長期的な」期待収益，を資産化率とすると，の変化による企業価値の変化率は以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |

の変化による将来の期待収益への影響を2次関数として無視すれば，共通市場要因を除いた後のの変化によるリターンの残差はの関数となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

ただし，は以下を満たす．

(40)より，との相関係数は，(41)を満たすことになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (41) |

(40)のの定義から，は偏相関係数である．定義上，(34)の番目の資産はの変化に対して完全に負の相関を持つので，(41)は(42)と書き換えることができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

したがって，（34）のの係数は，（36）および（37b）のと同じ性質を持つと予想される．

ゼロベータポートフォリオが，我々の長期債ポートフォリオの代理人であるかどうかは，まだ確定していない．が正であることの強力な理論的根拠はなくゼロベータポートフォリオは経験的構成要素であるため，BJS と Scholes の知見に基づく間接的経験論に頼ることになる．

Scholesは，市場ポートフォリオと債券ポートフォリオの相関はゼロに近く，ゼロベータポートフォリオと債券ポートフォリオの相関は有意に正であるとしたため，（36）から，は有意に正であると予想されることになる．

本節の分析は予備的なものとしか言えないが，第7節のモデル仕様は，資本資産価格モデルよりもデータとの整合性が高いように思われる．

# Conclusion (結論)

期待効用最大説と資産の有限責任説の双方に整合的な資本市場の異時点間モデルが開発された．古典的な資本資産価格モデルで規定される期待収益間の均衡関係は，非常に特殊な追加的仮定の下でのみ得られることが示された．第7-9節で示した一般モデルの特殊な形式が，BJSの研究で見出された経験的不一致を説明できるかどうかは，まだ経験的な疑問でしかない．

しかし，そうであろうとなかろうと，主な目的は，このモデルからいかにして検証可能な仕様が生み出されるかを説明し，それを最もよく行う人たちに，さらなる実証的検証を行うように促すことであった．このモデルは，投資機会セットのシフト以外の効果を含めるために明白な方法で拡張できるという意味で，ロバストである．

考慮されていない2つの重要な要因は，賃金収入と，相対価格が時間とともに変化する多くの消費財である．より完全なモデルでは，第7節の三基金定理は，m基金定理に一般化される．供給側についての議論はなかったが，企業のミクロ理論があれば，（1），（2），（29）を使って，モデルを閉じることが可能である．